Regn på en simpel SIR-model

Når man vil regne matematisk på SIR-modellen (SIR: Susceptible, Infectious, Recovered) skriver man typisk følgende differentialligninger op:

$$\dot{S}(t) = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N}$$
$$\dot{I}(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t)$$
$$\dot{R}(t) = \gamma I(t)$$

Hvor β og γ er raterne for hvor meget og hvor længe man smitter, som beskrevet i artiklen. *S* angiver de modtagelige (susceptible), *I* angiver de inficerede og *R* angiver de tidligere inficerede, som nu er immune (recovered). Prikken angiver den afledte i forhold til tid, $\frac{d}{dt}$.

Der findes metoder man kan bruge, til at regne matematisk på differentialligninger, som kan give en løsning til ligningerne, ligesom dem du kunne se på den interaktive figur (se også figur 5 i artiklen).

Her i opgavesættet, skal vi dog i stedet se på, hvordan man kan gøre modellen lidt simplere, så man kan regne på det, uden brug af avancerede computersimuleringer.

1. I SIR-modellen tager vi hverken højde for børn der bliver født, eller folk der dør. Derfor ændrer det samlede antal af personer sig ikke. Størrelsen af hele befolkningen kan vi derfor skrive som $N = S(t) + I(t) + R(t)$. Hvis vi kender befolkningsstørrelsen på forhånd (altså N), så kan vi nøjes med at regne på $S(t)$ og $I(t)$, og så regne $R(t)$ ud bagefter.

   Hvis det gælder at $N = S(t) + I(t) + R(t)$, hvordan kan man så regne ud hvad $R(t)$ er, hvis man kender tal-værdier for N, $S(t)$ og $I(t)$?

2. Differentialligningen for I er $\dot{I} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t)$. Sæt $I(t)$ udenfor en parentes.

3. I starten af en epidemi er stort set hele befolkningen modtagelige overfor sygdommen. For COVID-19 var dette netop situationen i starten af foråret 2020. Ingen havde tidligere været smittet (*R=0*), og der var kun få smittede i starten, så I er et lille tal i forhold til størrelsen af befolkning. Det vil sige at *S*, antallet af modtagelige personer, er næsten lig med antallet personer i befolkningen, *N*.

   Hvis vi forestiller os, at *S* faktisk er lig med *N*, og ikke ændrer sig, hvordan vil differentialligningen for *I(t)* så se ud?

Udarbejdet af:

Rasmus Kristoffer Pedersen
Postdoc i matematisk modellering af biologiske systemer

Viggo Andreasen
Lektor i matematik og epidemiologi

Lone Simonsen
Professor i folkesundhed og epidemiologi

De tre forskere fra Roskilde Universitet arbejder tæt sammen, hvor de kombinerer matematisk modellering af data med viden om tidligere epidemiers historie og kvantitativ indsigt i, hvordan epidemier breder sig, samt hvad man kan gøre for at inddæmme dem. De arbejder også med modellering af nye infektionssygdomme, 'big data' i sundhed og evaluering af vaccineprogrammer.

Artiklen er en del af RUC's undervisningspakke: "Epidemier og matematiske modeller", som findes på ruc.dk/undervisningspakke-epidemier

Til denne artikel og om samme emne hører en film og et opgavesæt, som kan bruges direkte i undervisningen på gymnasieniveau. Der afholdes SRP/SOP-øvelse forår og efterår om matematisk modellering. Se ruc.dk/srp-sop-oevelser-paa-roskilde-universitet
Lær mere om dine karrieremuligheder inden for medicinalbiologi. Se ruc.dk/karriereprofiler

4. En differentialligning på denne form $\dot{y} = a \cdot y(t)$ har følgende generelle løsning: $y(t) = y(0) \cdot e^{a \cdot t}$. Dit svar i forrige opgave skulle gerne have netop denne form. Hvad er løsningen til $\dot{I}$?

5. Tegn ved hjælp af et CAS-værktøj, nogle grafer for $I(t)$ for tal-værdier af β og γ mellem 0 og 1 og for t mellem 0 og 20. Sæt $I(0)$ til at være 1.

   For hvilke værdier af β og γ vokser $I(t)$, og for hvilke værdier aftager $I(t)$? Tænk over hvad det betyder, at $I(t)$ bliver et stort tal.

6. $\mathcal{R}_0$ kaldes det basale kontakttal og er et udtryk for, hvor mange hver smittet person i gennemsnit smitter, inden de bliver raske. Man definerer ofte $\mathcal{R}_0$ som $\frac{\beta}{\gamma}$. Med nogle af de værdier for beta og gamma du fandt før, hvad er den tilsvarende værdi for $\mathcal{R}_0$?

7. Man kan omskrive $I(t)$ så parametrene i stedet er $\mathcal{R}_0$ og γ, og β ikke længere indgår. Omskriv ligningen for $I(t)$.

8. Hvad sker der når $\mathcal{R}_0 > 1$ eller når $\mathcal{R}_0 < 1$? Forklar det enten ud fra beregninger af $I(t)$ eller ved at se på ligningen for $I(t)$.

9. For eksponentiel vækst, som er den slags vi har for $I(t)$ her, kan det godt være svært at se, hvor hurtigt det vokser på en normal figur. For at gøre det nemmere at sammenligne store og små tal, kan man benytte en logaritmisk y-akse. På en logaritmisk y-akse viser man 10-tals logaritmen til tallene i stedet for tallet selv. Prøv med udgangspunkt i et af dine eksempler fra tidligere, hvor $I(t)$ voksede hurtigt, at tage 10-tals logaritmen til $I(t)$ til forskellige tidspunkter. Lav en figur (i hånden eller ved hjælp af CAS) der viser det omregnede tal.

10. Her er data for COVID-19 i Danmark

Dato	**Antal nye smittede**
13. marts	33
14. marts	37
15. marts	45
16. marts	74
17. marts	76
18. marts	83
19. marts	107
20. marts	103
21. marts	48
22. marts	62
23. marts	132
24. marts	139
25. marts	151
26. marts	171
27. marts	217
28. marts	200
29. marts	128
30. marts	313
31. marts	255
1. april	282

    Plot datasættet med "Dage siden 13. marts" ud af førsteaksen, og antallet af nye smittede op af andenaksen. Lav en figur der viser data.

11. Regn 10-tals logaritmen til data, for antal smittede, fra tabellen ovenfor. Lav en ny figur hvor du viser disse tal.

12. Tallene i tabellen i opgave 10 er for antallet af *nye* smittede hver dag, mens $I(t)$ i virkeligheden er et udtryk for det samlede antal personer, der er inficerede på en given dag (altså også dem der blev smittet eksempelvis dagen før og endnu ikke er immune). Derfor kan man ikke direkte sammenligne udtrykket for $I(t)$ med data fra tabellen. Men de to kurver burde udvikle sig på samme måde, og de burde vokse lige hurtigt. Ved at sætte $I(0)$ lig med antallet af smittede på dag 0, prøv at finde værdier for γ og $\mathcal{R}_0$, som passer godt til dataene fra tabellen.

13. Tag 10-tals logaritmen til dine løsninger af $I(t)$ fra forrige opgave. Hvordan ser de ud, hvis du sammenligner med den kurve af data, du tegnede i opgave 11?

Du kan læse Mathematics på Roskilde Universitet

Hvis du synes, at emnet her er spændende, så kan Naturvidenskabelig Bachelor være noget for dig. På Naturvidenskabelig Bachelor kan du fx læse Mathematics i kombination med Molecular Biology eller Medicinalbiologi. Kandidatuddannelsen Mathematical Bioscience kan måske også have din interesse.

Sådan er studiet

På Roskilde Universitet er Mathematics en del af den Naturvidenskabelige Bachelor. Det første år bliver du trænet i centrale naturvidenskabelige teorier, metoder og modeller på højeste niveau. På andet og tredje år specialiserer du dig i to fag. Det giver dig et stærkt fundament og gør dig til en dygtig matematiker, der samtidig kan tænke på tværs af de naturvidenskabelige fag.

Mathematics kan læses i kombination med ét af flg. fag:

- Bioprocess Science
- Computer Science (Datalogi)
- Environmental Biology
- Medicinalbiologi
- Molecular Biology
- Physics

Se mere om kombinationsmulighederne på: ruc.dk/bachelor/mathematics

Se mere på ruc.dk/kandidat/uddannelser

Sådan er din hverdag

Fra start til slut i studiet er du tæt på forskerne. Gennem dine projekt- og kursusvalg arbejder du videnskabeligt og kan være med til at skabe innovative løsninger på virkelighedens problemer. Dit projektarbejde kan måske indgå som en del af et større forskningsprojekt, eller du kan samarbejde med eksterne virksomheder og organisationer, hvis du har lyst til det.

På hvert semester arbejder du halvdelen af tiden med kurser inden for det naturvidenskabelige område. Nogle kurser er obligatoriske og giver dig den nødvendige faglige ballast. Men der er også kurser, du selv vælger efter interesse. Den anden halvdel af tiden arbejder du med et projekt.

Projektarbejdsformen skærper din evne til at analysere og samarbejde, og du kan samtidig fordybe dig i det, du finder fagligt interessant. Karrieremæssigt lærer du således at mestre en række af de færdigheder, erhvervslivet efterspørger allermest; evnen til at projektlede, samarbejde, kommunikere, nytænke og løse komplekse problemer.

Kig

Åbent Hus

Uddannelse

Karriere